ACADEMIA NEPER

Avda. Andalucía 24, local interior
28.343 Valdemoro (Madrid)
Tel.: 644 36 69 52
academianeper@gmail.com
www.academianeper.com

Matemáticas (Álgebra); 2º Bachillerato

Matrices

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&m\\1&1&m\\m&0&1\end{pmatrix}$, donde $m\in\mathbb{R}$. Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

(Cantabria. Septiembre 2007. Bloque 2. Opción B)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&m&1&0&0\\1&1&m&0&1&0\\m&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1\\F_3=F_3-mF_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&m&1&0&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&-2m&1-m^2&-m&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1+2F_2\\F_3=F_3-2mF_2}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&m&-1&2&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&1-m^2&m&-2m&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_1=F_1-\frac{m}{1-m^2}F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/(1-m^2)&2/(1-m^2)&-m/(1-m^2)\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&1-m^2&m&-2m&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2=-F_2\\F_3=\frac{1}{1-m^2}F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/(1-m^2)&2/(1-m^2)&-m/(1-m^2)\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&m/(1-m^2)&-2m/(1-m^2)&1/(1-m^2)\end{array}\right)$$

La inversa, si existe, de la matriz A es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/(1-m^2)&2/(1-m^2)&-m/(1-m^2)\\1&-1&0\\m/(1-m^2)&-2m/(1-m^2)&1/(1-m^2)\end{pmatrix}$$

Para poder calcular la inversa tenemos que dividir entre $(1-m^2)$, luego esta expresión no puede ser cero. Es decir, la matriz A es invertible cuando $(1-m^2)\neq 0\to m\neq 1$ y $m\neq -1$.

Calcula el rango de A según los distintos valores del parámetro real a.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&a&2\\-1&0&-1&3\\5&a+4&-4&-3\end{pmatrix}$$

(Madrid. Junio 2002. Opción A. Ejercicio 2)

$$\begin{pmatrix}2&0&a&2\\-1&0&-1&3\\5&a+4&-4&3\end{pmatrix}\xrightarrow[C_2\leftrightarrow C_4]{}\begin{pmatrix}2&2&a&0\\-1&3&-1&0\\5&3&-4&a+4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1\leftrightarrow F_2]{}\begin{pmatrix}-1&3&-1&0\\2&2&a&0\\5&3&-4&a+4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{F_2=F_2+2F_1\\F_3=F_3+5F_1}]{}\begin{pmatrix}-1&3&-1&0\\0&8&a-2&0\\0&18&-9&a+4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-\frac{9}{4}F_2]{}\begin{pmatrix}-1&3&-1&0\\0&8&a-2&0\\0&0&-\frac{9}{4}(a-6)&a+4\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es siempre 3. El parámetro a no puede ser al mismo tiempo igual a 6 e igual a 4, entonces los elementos de la última fila nunca serán todos cero.

ACADEMIA NEPER

ACADEMIA NEPER

Avda. Andalucía 24, local interior
28.343 Valdemoro (Madrid)
Tel.: 644 36 69 52
academianeper@gmail.com
www.academianeper.com

Determinantes

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&k&t\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$

a) Hallar A^{10}.

b) Calcular la matriz inversa de B.

c) En el caso particular $k=0$, hallar B^{10}.

(Madrid. Septiembre 2005. Opción B. Ejercicio 4)

a) $A^2=\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&k^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&k^2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&k&t\\0&0&k\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

En general: $A^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ para $n\geq 3\rightarrow A^{10}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&k&t&1&0&0\\0&1&k&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-kF_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&t-k^2&1&-k&0\\0&1&k&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-(t-k^2)F_3\\F_2=F_2-kF_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-k&k^2-t\\0&1&0&0&1&-k\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-k&k^2-t\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) $B^2=\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$B^3=\begin{pmatrix}1&0&2t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&3t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

En general: $B^n=\begin{pmatrix}1&0&nt\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\rightarrow B^{10}=\begin{pmatrix}1&0&10t\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Comprueba que las dos matrices cumplen que $|AB|=|A|\cdot|B|$.

$$A=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}6&0\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6&0\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&6\\-6&0\end{pmatrix}\rightarrow|AB|=36$$

$$\left.\begin{array}{l}|A|=\begin{vmatrix}2&-3\\-1&0\end{vmatrix}=-3\\[2ex]|B|=\begin{vmatrix}6&0\\-1&-2\end{vmatrix}=-12\end{array}\right\}\rightarrow|A|\cdot|B|=36$$

ACADEMIA NEPER

ACADEMIA NEPER

Avda. Andalucía 24, local interior
28.343 Valdemoro (Madrid)
Tel.: 644 36 69 52
academianeper@gmail.com
www.academianeper.com

Resuelve estos determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - 2\cdot(-13) = 41$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\cdot 4 = -8$

Estudia el rango de la matriz para los distintos valores del parámetro.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) \geq 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 5+a \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5+a \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & a \end{vmatrix} = 20 - 2a$$

- Si $a \neq 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es distinto de cero. El rango de la matriz es 4.
- Si $a = 10 \rightarrow$ El menor de orden 4 es nulo. El rango de la matriz es 3.

a) Si A es una matriz y $a \in \mathbb{R}$, ¿cuándo se cumple que Rango (aA) = Rango (A)?

b) Estudie, en función de los valores de a, el rango de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

(Murcia. Junio 2001. Bloque 1. Cuestión 2)

a)
- Si A es la matriz nula, su rango es 0 y el rango de la matriz aA también es 0 para cualquier valor de a.
- Si $a \neq 0 \rightarrow$ El número de filas o columnas linealmente independientes de A y de aA coincide. Los rangos de ambas matrices son iguales.
- Si $a = 0 \rightarrow$ La matriz aA tiene rango 0 y solo coincide con el rango de A si esta matriz es nula.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2a$

ACADEMIA NEPER

ACADEMIA NEPER

Avda. Andalucía 24, local interior
28.343 Valdemoro (Madrid)
Tel.: 644 36 69 52
academianeper@gmail.com
www.academianeper.com

A, B y C son tres matrices cuadradas tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$ y $|C| = 2$. Decide razonadamente el valor de los siguientes determinantes.

a) $|A^t|$ c) $|AB^{-1}|$ e) $|(BC)^{-1}|$

b) $|B^{-1}|$ d) $|AB^{-1}|$ f) $|C^{-1}B^t|$

a) $|A^t| = |A| = 5$

b) $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{4}$

c) $|AB^{-1}| = |A| \cdot |B^{-1}| = |A| \cdot \dfrac{1}{|B|} = 5 \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

d) $|A^{-1}B| = |A^{-1}| \cdot |B| = \dfrac{1}{|A|} \cdot |B| = \dfrac{1}{5} \cdot 4 = \dfrac{4}{5}$

e) $|(BC)^{-1}| = \dfrac{1}{|BC|} = \dfrac{1}{|B| \cdot |C|} = \dfrac{1}{4 \cdot 2} = \dfrac{1}{8}$

f) $|C^{-1}B^t| = |C^{-1}| \cdot |B^t| = \dfrac{1}{|C|} \cdot |B| = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Sistemas de ecuaciones

Resuelve estos sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ -x - y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} y - z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 3 \\ 3x \qquad - 2z &= 7 \end{aligned}\right\}$

a) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 + \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z &= \lambda \end{aligned}\right.$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

ACADEMIA NEPER

Avda. Andalucía 24, local interior
28.343 Valdemoro (Madrid)
Tel.: 644 36 69 52
academianeper@gmail.com
www.academianeper.com

Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 2x-2y=1 \\ x-\lambda z=3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -\lambda-1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

- $\text{Si } \lambda \neq 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=0 \end{array}\right.$

- $\text{Si } \lambda = 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+\ z=-2 \\ 2y-2z=\ 5 \\ 0=\ 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3+a \\ y=\dfrac{5+2a}{2} \\ z=a \end{array}\right. \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

Discute el sistema según los valores de *a*.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-3y+\ z=0 \\ x-ay-3z=0 \\ 5x+3y-\ z=0 \end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango (A) = Rango (A^*) $\rightarrow$ Sistema compatible

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -a & -3 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 7a+63$$

- Si $a \neq -9 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow$ Rango $(A) = 3 =$ n.º de incógnitas
  Sistema compatible determinado
- Si $a = -9 \rightarrow |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 21 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (A) = 2 < \text{n.º de incógnitas}$$

Sistema compatible indeterminado

Resuelve, aplicando la regla de Cramer, estos sistemas compatibles indeterminados.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=6 \\ -3x+y-2z=-3 \\ 2x-3y+z=-3 \end{array}\right\}$$

Avda. Andalucía 24, local interior
28.343 Valdemoro (Madrid)
Tel.: 644 36 69 52
academianeper@gmail.com
www.academianeper.com

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y = 6 - z \\ -3x + y = -3 + 2z \end{array}\right\}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 6-z & 2 \\ -3+2z & 1 \end{vmatrix} = 12 - 5z \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 6-z \\ -3 & -3+2z \end{vmatrix} = 15 - z$

$x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{12-5z}{7} \qquad y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{15-z}{7}$

La solución es: $x = \dfrac{12-5\lambda}{7}$, $y = \dfrac{15-\lambda}{7}$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} px + 7y + 8z = 1.370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1.395 \end{array}\right\}$$

a) Discútalo en función del parámetro p.

b) Resuelva el sistema para $p = 6$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 6)

a) $A = \begin{pmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1.395 \end{array}\right)$

$|A| = \begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix} = -p^2 + 16p - 63 \qquad \begin{vmatrix} p & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 8 & 1.395 \end{vmatrix} = -205p + 1.410$

$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$-p^2 + 16p - 63 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 7 \\ p = 9 \end{cases}$

- Si $p \in \mathbb{R} - \{7, 9\} \rightarrow$ Rango (A) = Rango $(A^*) = 3$
  Sistema compatible determinado
- Si $p = 7$ o $p = 9 \rightarrow$ Rango $(A) = 2 \neq$ Rango $(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

En un supermercado se venden huevos de categorías *XL*, *L* y *M*. Averigua el precio de una docena de cada tipo de huevos sabiendo que:

- Carmen compró una docena de cada categoría y pagó 4,90 €.
- Jesús pagó 9,60 € por 2 docenas *XL* y 4 docenas *M*.
- Esther se llevó 3 docenas *L* y 3 *M* y pagó 9,30 €.

Sean x, y, z los precios de cada docena de huevos de categorías *XL*, *L* y *M*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 4{,}9 \\ 2x + 4z = 9{,}6 \\ 3y + 3z = 9{,}3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 4{,}9 \\ -2y + 2z = -0{,}2 \\ y + z = 3{,}1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 4{,}9 \\ -2y + 2z = -0{,}2 \\ 4z = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1{,}8 \\ y = 1{,}6 \\ z = 1{,}5 \end{cases}$$

Así, la docena de huevos *XL* cuesta 1,80 €, la de categoría *L* vale 1,60 € y la de *M* 1,50 €.

Pilar compra 200 acciones de la empresa *A*, 150 de *B* y 100 de *C* y paga 3.300 € mientras que Juan gasta 3.750 € por la compra de 50 acciones de *A*, 120 de *B* y 240 de *C*. Con estos datos, ¿es posible saber el precio de cada acción? ¿Y si cada acción tiene un precio entero comprendido entre 1 € y 12 €, ambos incluidos?

Sean x, y, z los precios de las acciones de las empresas *A*, *B* y *C*, respectivamente.

Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} 200x + 150y + 100z = 3.300 \\ 50x + 120y + 240z = 3.750 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 200 & 150 \\ 50 & 120 \end{vmatrix} = 16.500 \neq 0$$

Los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada son iguales a 2, como el sistema tiene 3 incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.
Es decir, el sistema tiene infinitas soluciones de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 200x + 150y + 100z = 3.300 \\ 50x + 120y + 240z = 3.750 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 5x + 12y + 24z = 375 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 3y + 2z = 66 \\ 33y + 86z = 1.170 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{16\lambda - 111}{11} \\ y = \dfrac{1.170 - 86\lambda}{33} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Con los datos no es posible determinar los precios de las acciones.

Si las acciones tienen un precio entero, el valor de la acción de la empresa *C* solo puede ser de 9 €, así las acciones de la empresa *A* valen 3 € y las de *B* 12 €.

Un coleccionista decide regalar un montón de sellos. A cada persona con la que se encuentra le da la mitad de los sellos que llevaba más uno, y se encuentra exactamente con 6 personas. Si al final regala todos los sellos, ¿cuántos sellos tenía el coleccionista?

(País Vasco. Julio 2007. Bloque E. Cuestión E)

Sea x el número de sellos que tenía el coleccionista.

A la primera persona le da: $\dfrac{x}{2} + 1$

A la segunda:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1\right)\right) : 2 + 1 = \left(\frac{x}{2} - 1\right) : 2 + 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

A la tercera:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\right) : 2 + 1 = \frac{x}{8} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{x}{8} + \frac{1}{4}$$

A la cuarta:

$$\left(x - \left(\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\right)\right) : 2 + 1 = \left(x - \frac{7x}{8} - \frac{7}{4}\right) : 2 + 1 =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{7}{8} + 1 = \frac{x}{16} + \frac{1}{8}$$